Université Paris-Diderot
MA2 - Algèbre et analyse élémentaires II

Année 2013-2014
L1 MASS

Partiel : corrigé

08 mars 2014

Exercice I. 1) On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x,y) = (-10x + 24y, -4x + 10y).$$

Donnez la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ au départ et à l'arrivée.

2) a) L'application f est elle surjective ?

b) Montrer qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 < \lambda_2$ et que les noyaux $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ soient non nuls pour $i \in \{1,2\}$.

3) a) Pour $i \in \{1,2\}$, donnez un vecteur u_i de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ d'ordonnée égale à 1.

b) Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$.

4) Quelle est la matrice B de f dans la base (u_1, u_2) au départ et à l'arrivée.

5) En déduire la valeur de A^n pour tout entier naturel n.

Solution. 1) La matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ au départ et à l'arrivée est

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 24 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

2) a) Le déterminant de A est

$$\begin{vmatrix} -10 & 24 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = -100 + 96 = -4 \neq 0.$$

Donc A est inversible. Donc f est bijective, en particulier surjective.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Étudions l'inversibilité de

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} -10-\lambda & 24 \\ -4 & 10-\lambda \end{pmatrix}$$

en fonction de λ. Le déterminant de $A - \lambda I$ est

$$\begin{vmatrix} -10-\lambda & 24 \\ -4 & 10-\lambda \end{vmatrix} = -(10+\lambda)(10-\lambda) + 96 = -4 + \lambda^2.$$

Ce déterminant est nul si et seulement si $\lambda = 2$ ou $\lambda = -2$. Il existe donc deux réels tels que les noyaux de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ sont non nuls : il s'agit de $\lambda_1 = -2$ et $\lambda_2 = 2$.

3) a) Déterminons le noyau de $f - \lambda_i \mathrm{Id}$ pour $i = 1, 2$.

– La matrice de $f - \lambda_1 \mathrm{Id}$ est

$$A + 2I = \begin{pmatrix} -8 & 24 \\ -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer son noyau, résolvons le système

$$\begin{cases} -8x + 24y = 0 \\ -4x + 12y = 0 \end{cases} \iff \left\{ -4x + 12y = 0, \right.$$

ou la simplification est due au fait que la première équation est deux fois la deuxième.

Introduisons un paramètre réel $t \in \mathbb{R}$. Le système se réécrit

$$\begin{cases} x = 3y = 3t \\ y = t, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

– La matrice de $f - \lambda_2 \mathrm{Id}$ est

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -12 & 24 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Pour déterminer son noyau, résolvons le système

$$\begin{cases} -12x + 24y = 0 \\ -4x + 8y = 0 \end{cases} \iff \left\{ -4x + 8y = 0, \right.$$

où la simplification est due au fait que la première ligne est trois fois la deuxième. Introduisons un paramètre réel $t \in \mathbb{R}$. Le système se réécrit

$$\begin{cases} x = 2y = 2t \\ y = t, \ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de ce système est donc

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Donc $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.

b) Les vecteurs u_1 et u_2 ne sont pas colinéaires car ils ont la même ordonnée mais une abscisse différente. Ils forment donc une famille libre de 2 vecteurs de $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire une base de $\mathbb{R}^2$.

4) On sait que $u_1 \in \mathrm{Ker}(f + 2\mathrm{Id})$. Donc $f(u_1) = -2u_1$. De même, $f(u_2) = 2u_2$. Donc la matrice de f dans la base (u_1, u_2) est

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5) La matrice

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique dans la base (u_1, u_2). Donc $A = PBP^{-1}$. Par une récurrence immédiate, il vient

$$A^n = PB^nP^{-1}.$$

Or, comme B est diagonale,

$$B^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculons enfin P^{-1}.

Méthode 1 (Gauss).

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \\ L_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 3L_1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ L_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ -L_2 \end{array}$$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Méthode 2 (Cofacteurs). Calculons le déterminant de P : $\det P = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1$. Donc, on a

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\,{}^t\mathrm{Cof}(P) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} A^n &= 2^n \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3(-1)^n & 2 \\ (-1)^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= 2^n \begin{pmatrix} 3(-1)^n - 2 & 6(1-(-1)^n) \\ (-1)^n - 1 & -2 \times (-1)^n + 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Donc si n est pair, on a $A^n = 2^n I$, et si n est impair, on a $A^n = 2^n \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = 2^{n-1}A$.

/————/ /————/ /————/

Exercice II. Pour tout entier n strictement positif, on note E_n l'espace vectoriel des polynômes en X de degré strictement inférieur à n. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccc} f: & E_3 & \to & E_2 \\ & P(X) & \mapsto & P'(X) - X \cdot P''(X) \end{array}$$

1) Montrer que f est une application linéaire.
2) Donnez la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$ de E_3 et $(1, X)$ de E_2.

Solution. 1) Soient P et Q deux éléments de E_3, λ et μ deux scalaires.

$$f(\lambda P + \mu Q)(X) = (\lambda P + \mu Q)'(X) - X(\lambda P + \mu Q)''(X).$$

Par linéarité de la dérivation, on obtient

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q)(X) &= \lambda P'(X) + \mu Q'(X) - X(\lambda P''(X) + \mu Q''(X)) \\ &= \lambda P'(X) + \mu Q'(X) - X\lambda P''(X) - X\mu Q''(X) \\ &= \lambda P'(X) - \lambda X P''(X) + \mu Q'(X) - \mu X Q''(X) \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

2) Déterminons les images de chaque vecteur de la base $(1, X, X^2) = (P_0, P_1, P_2)$ de E_2, et exprimons ces images en fonction des vecteurs de la base $(1, X) = (Q_0, Q_1)$.

$$\begin{aligned} &f(P_0)(X) = P_0' - XP_0'' = 0, \\ &f(P_1)(X) = P_1'(X) - X.P_1''(X) = 1 = Q_0, \\ &f(P_2)(X) = P_2'(X) - XP_2''(X) = 2X - X \cdot 2 = 0. \end{aligned}$$

Donc la matrice A de f dans la base $(1, X, X^2)$ de E_3 et $(1, X)$ de E_2 est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

/————/ /————/ /————/

Exercice III. On considère une application linéaire g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ telle que :

$$g^{-1}(\vec{0}) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x - 3y + 2z = 0 \right\}$$

et

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1) *Question de cours :* Donnez la définition du noyau et de l'image d'une application linéaire.
2) a) Donnez une base du noyau de g.
   b) Quel est le rang de g ?
   c) A-t-on $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g$?
3) On considère les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Montrez que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
4) Donnez la matrice B de g dans la base $(v_i)_{(1 \leq i \leq 3)}$ de $\mathbb{R}^3$ au départ et à l'arrivée.
5) Quelle est la matrice de passage P de la base canonique à la base $(v_i)_{(1 \leq i \leq 3)}$?
6) Quel est l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?
7) Donnez la matrice A de g dans la base canonique au départ et à l'arrivée.

Solution. 1) Soit f une application linéairede E dans F, avec E, F espaces vectoriels. Le noyau de f, noté $\operatorname{Ker} f$, est défini comme suit.

$$\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E,\ f(x) = 0\}.$$

L'image de f notée $\operatorname{Im} f$ est définie comme suit.

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F | \exists x \in E,\ f(x) = y\}.$$

2) a) Le noyau de g est défini par une équation *non nulle* dans $\mathbb{R}^3$, sa dimension est donc de 2. Les vecteurs $u = (-2, 0, 1)$ et $v = (3, 1, 0)$ sont deux éléments de $\operatorname{Ker} g$, non colinéaires, donc formant une famille libre de deux éléments. Donc (u, v) est une base de $\operatorname{Ker} g$.
   b) Par le théorème du rang, on sait que $\dim(\operatorname{Ker} g) + \operatorname{rang} g = 3$. Donc, étant donné que $\dim(\operatorname{Ker} g) = 2$, on a $\operatorname{rang} g = 3 - 2 = 1$.
   c) Déterminons l'intersection $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g$. Étant donné que $\dim \operatorname{Im} g = 1$ et que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} g$, on a $\operatorname{Im} g = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Or $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne vérifie pas l'équation de $\operatorname{Ker} g$. Donc $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$, donc ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe.
   Comme $\dim(\operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g) = \dim(\operatorname{Ker} g) + \dim(\operatorname{Im} g) = 3$ par théorème du rang, on en déduit que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} g \oplus \operatorname{Im} g$.
3) Pour montrer que (v_1, v_2, v_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, montrons que cette famille est libre. Supposons qu'il existe α, β et γ trois réels tels que $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$. On a alors

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = -\gamma v_3.$$

   Or, $\alpha v_1 + \beta v_2 \in \operatorname{Ker} g$ et $-\gamma v_3 \in \operatorname{Im} g$. Donc, comme $\operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$, $-\gamma v_3 = 0$, c'est-à-dire que $\gamma = 0$, et

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0.$$

   Les vecteurs v_1 et v_2 formant une base de $\operatorname{Ker} g$, on en déduit que $\alpha = \beta = 0$.
   Finalement, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, donc (v_1, v_2, v_3) est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Il s'agit donc d'une base de $\mathbb{R}^3$.
4) Calculons les images de v_1, v_2, v_3 par g.
   Les vecteurs v_1 et v_2 forment une base de $\operatorname{Ker} g$ donc $g(v_1) = g(v_2) = 0$.
   Par hypothèse, $g(v_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2v_3$.
   Donc la matrice de g dans la base (v_1, v_2, v_3) est

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5) La matrice de passage de (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique est

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Déterminons l'inverse de P.

Méthode 1 (Gauss).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \\ L_1 \\ L_3 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 3L_1 \\ L_3 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_3 \\ L_2 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + 2L_2 \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \frac{1}{3}L_3 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -1 & \frac{2}{3} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_3 \\ L_3 \end{array}$$

Donc P est inversible de matrice inverse

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Méthode 2 (cofacteurs). On veut calculer $P = \frac{1}{\det P}\,{}^t\mathrm{Cof}(P)$.

$$\mathrm{Cof}(P) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour le déterminant, on developpe sur la deuxième ligne, et on obtient $\det P = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(-2-1) = 3$. On a donc

$$P = \frac{1}{\det P}\,{}^t\mathrm{Cof}(P) = \frac{1}{3}\,{}^t\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

7) Par définition des matrices de passage, on a $B = P^{-1}AP$, et donc

$$\begin{aligned} A &= PBP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & -1 & 2/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2/3 & -2 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & -2 & 4/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

/————/ /————/ /————/

Exercice IV. Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $f \circ f = 0$.

1) Montrer que l'image de f est incluse dans son noyau.

2) L'application f est-elle inversible ?

Solution. 1) Soit x un élément de $\operatorname{Im} f$. Montrons que $x \in \operatorname{Ker} f$.
x est dans l'image de f donc il existe y dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f(y) = x$. Donc $f(x) = f \circ f(y) = 0$ par hypothèse. Donc $x \in \operatorname{Ker} f$.

2) **Méthode 1.** Supposons f inversible. Il existe alors g telle que $f \circ g = \mathrm{Id}$. En composant à gauche par f, il vient $f \circ f \circ g = f$, c'est-à-dire, puisque $f \circ f = 0$, $0 = f$, ce qui contredit l'inversibilité supposée. Donc f n'est pas inversible.
Méthode 2. Par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = n$. Comme l'image de f est incluse dans son noyau, $\dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim(\operatorname{Ker} f)$. On a donc

$$n = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) \leq 2\dim(\operatorname{Ker} f),$$

c'est-à-dire $\dim(\operatorname{Ker} f) \geq n/2 > 0$. En particulier le noyau de f n'est pas réduit à 0, donc f n'est pas inversible.

/———/ /———/ /———/

Exercice V. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, soit $f_m : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$f_m(x, y, z, w) = (x - z - 2w, (m-1)y + 3z + 6w, (m+1)z + (m+1)^2 w, -x + m^2 z + 2w).$$

1) Donnez la matrice A_m de f_m dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
2) a) Pour quelles valeurs de m l'application f_m est elle bijective ?
b) Quel est le rang de A_1 ?
c) Donnez le rang de f_m en fonction de m.
3) a) Donnez une base du noyau de f_1.
b) Donnez une base du noyau de f_{-1}.
c) Donnez une base $\mathcal{B}$ de $\operatorname{Ker} f_1 + \operatorname{Ker} f_{-1}$
d) Complétez la base $\mathcal{B}$ en une base $\mathbb{R}^4$.

Solution. 1) La matrice de f_m dans la base canonique est

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & m-1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & m+1 & (m+1)^2 \\ -1 & 0 & m^2 & 2 \end{pmatrix}$$

2) a) **Méthode 1.** Calculons le déterminant de A_m. En développant sur la deuxième colonne, on obtient

$$\begin{aligned}
\det A_m &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & m-1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & m+1 & (m+1)^2 \\ -1 & 0 & m^2 & 2 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & m+1 & (m+1)^2 \\ -1 & m^2 & 2 \end{vmatrix} \\
&= (m-1)\left(\begin{vmatrix} m+1 & (m+1)^2 \\ m^2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ m+1 & (m+1)^2 \end{vmatrix}\right) \\
&= (m-1)\Big(\big(2(m+1) - (m+1)^2 m^2\big) - \big(-(m+1)^2 + 2(m+1)\big)\Big) \\
&= (m-1)(m+1)\big(2 - m^3 - m^2 + m + 1 - 2\big) \\
&= (m-1)(m+1)^2(1 - m^2) = -(m-1)^2(m+1)^3.
\end{aligned}$$

L'application f_m est donc bijective si et seulement si $\det A_m \neq 0$ si et seulement si $m \neq 1, -1$.
Méthode 2. Échelonnons la matrice A_m par la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & m-1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & m+1 & (m+1)^2 \\ -1 & 0 & m^2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & m-1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & m+1 & (m+1)^2 \\ 0 & 0 & m^2-1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 + L_1 \end{matrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & m-1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & m+1 & (m+1)^2 \\ 0 & 0 & 0 & -(m-1)(m+1)^2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 - (m-1)L_3 \end{matrix}$$

L'application f_m est bijective si la matrice est échelonnée avec 4 pivots non nuls, c'est-à-dire si $m \neq 1$ et $m \neq -1$.

b) Dans le cas $m = 1$ on a

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthode 1. Soient v_1, v_2, v_3, v_4 les vecteurs colonnes de A_1. On a $v_2 = 0$ et $v_4 = 2v_3$. Donc $V_1 := \text{Vect}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \text{Vect}\{v_1, v_3\}$. De plus v_1 et v_3 ne sont pas proportionnels, donc (v_1, v_3) est une base de V_1, et $\text{rang}(A_1) = \dim V_1 = 2$.

Méthode 2. On applique l'algorithme de Gauss à la matrice A_1 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 + L_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ L_3 - \frac{3}{2}L_2 \\ \\ \end{matrix}$$

La matrice est alors échelonnée avec deux pivots, le rang de A_1 est donc 2.

c) Si $m \notin \{-1; +1\}$, le rang de f_m est de 4.
Si $m = 1$, le rang de f_m est égal à 2 par la question précédente.
Il nous reste que calculer le rang de f_{-1}. Dans ce cas, la matrice A_{-1} est donnée par :

$$A_{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Méthode 1. Soient w_1, w_2, w_3, w_4 les vecteurs lignes de A_{-1}. On a $w_3 = 0$ et $w_4 = -w_1$. Donc $W_{-1} := \text{Vect}\{w_1, w_2, w_3, w_4\} = \text{Vect}\{w_1, w_2\}$. De plus w_1 et w_2 ne sont pas proportionnels, donc (w_1, w_2) est une base de W_{-1}, et $\text{rang}(f_{-1}) = \dim W_{-1} = 2$.

Méthode 2. On applique l'algorithme de Gauss à la matrice A_{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ L_4 + L_1 \end{matrix}$$

Elle est échelonnée avec deux pivots : le rang de f_{-1} est donc égal à 2.

3) a) Déterminons une base du noyau de f_1 à l'aide de la matrice A_1 échelonnée

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un vecteur (x, y, z, w) de $\text{Ker}\, f_1$ va vérifier

$$\begin{cases} x - z - 2w = 0 \\ \quad 3z + 6w = 0 \end{cases}$$

Introduisons deux paramètres α et β pour réécrire le système

$$\begin{cases} x - z - 2w = 0 \\ \quad 3z + 6w = 0 \\ \qquad\quad y = \alpha \\ \qquad\quad w = \beta, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = -z - 2w = 0 \\ z = -2\beta \\ y = \alpha \\ w = \beta. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du système s'écrit donc

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ -2\beta \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Une base de $\operatorname{Ker} f_1$ est donc $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

b) De même, déterminons $\operatorname{Ker} f_{-1}$ à l'aide de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un vecteur (x, y, z, w) de $\operatorname{Ker} f_{-1}$ doit vérifier

$$\begin{cases} x - z - 2w = 0 \\ -2y + 3z + 6w = 0 \end{cases}$$

Introduisons deux paramètres α et β. Le système devient

$$\begin{cases} x - z - 2w = 0 \\ -2y + 3z + 6w = 0 \\ z = \alpha \\ w = \beta, \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = \alpha + 2\beta \\ y = \frac{3}{2}\alpha + 3\beta \\ z = \alpha \\ w = \beta, \end{cases}.$$

L'ensemble des solutions du système s'écrit donc

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta \\ \frac{3}{2}\alpha + 3\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Une base de $\operatorname{Ker} f_{-1}$ est donc $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

c) Remarquons que

$$\operatorname{Ker} f_1 + \operatorname{Ker} f_{-1} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Or, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc

$$\operatorname{Ker} f_1 + \operatorname{Ker} f_{-1} = \operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

La famille de vecteurs $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ étant échelonnée, elle est libre. Donc c'est une base de $\operatorname{Ker} f_1 + \operatorname{Ker} f_{-1}$.

d) Soit $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est échelonnée, elle est donc libre et forme une base de $\mathbb{R}^4$. On a donc complété la base précédente en une base de $\mathbb{R}^4$.